

基于 QEM 的三角网格简化实验报告

1. 问题背景

三角网格是三维模型最常见的表示方式之一。高精度扫描模型通常包含大量顶点和三角面，例如本实验中的 gargoyle 模型包含 111,137 个顶点和 222,270 个三角面。高面数模型能表达丰富细节，但也会增加存储、传输、渲染和后续处理成本。因此，在尽量保持模型几何形状和视觉效果的前提下降低网格复杂度，是图形学和几何处理中的重要问题。

本项目实现 Garland 和 Heckbert 在论文 *Surface Simplification Using Quadric Error Metrics* 中提出的 QEM (Quadric Error Metrics, 二次误差度量) 网格简化算法。实验目标是在给定 7 个测试模型上，将模型分别简化到原始顶点数的 50%、20% 和 10%，并使用 Metro 工具计算简化误差，同时与 QSlim2.0 的结果进行对比。

QEM 的核心思想是：对每个顶点维护一个二次误差矩阵，用它近似该顶点偏离原始局部曲面的代价；然后不断选择代价最小的边进行塌缩，直到达到目标顶点数。相比直接按边长或局部面积等简单指标删边，QEM 能更系统地估计一次塌缩对几何形状造成的误差。

2. 研究内容与方法

2.1 QEM 误差度量

对于一个三角形所在平面 $ax + by + cz + d = 0$ ，令 $p = [a, b, c, d]^T$ ，三维点齐次坐标为 $v = [x, y, z, 1]^T$ ，则点到平面的平方距离可写为 $(p^T v)^2 = v^T (pp^T) v$ 。其中 $K_p = pp^T$ 是该平面的 quadric。一个顶点通常邻接多个三角形，因此顶点误差矩阵定义为邻接面 quadric 的累加 $Q = \sum K_p$ ，顶点移动到位置 v 时误差为 $E(v) = v^T Q v$ 。对边 (v_1, v_2) 进行塌缩时，新顶点误差矩阵为 $Q_{new} = Q_1 + Q_2$ 。程序优先求解使 $v^T Q_{new} v$ 最小的最优位置；若线性系统不可逆，则比较 v_1 、 v_2 和中点三种候选位置，选择误差最小者。

2.2 算法流程

本项目实现的 QEM 简化流程为：读取 OBJ 网格；计算每个三角形的平面 quadric；对每个顶点累加相邻面得到 Q ；对每条边计算塌缩代价和最优新位置；将候选边按代价放入最小堆；反复取出代价最小的合法边执行塌缩；更新新顶点 $Q = Q_1 + Q_2$ 和受影响邻接边代价，直到达到目标顶点数。

理论上，如果候选边数量为 n ，使用优先队列维护边代价，主流程可达到接近 $O(n \log n)$ 的复杂度。本项目实现中，为了保证实验结果稳定，还包含额外的合法性检查、候选失效判断和计数刷新，因此实际运行时间会高于理想化复杂度，尤其在大规模模型上更明显。

2.3 数据结构与实现

本项目使用 C++ 实现，底层网格结构采用 OpenMesh 的 `TriMesh_ArrayKernelT`。OpenMesh 内部使用半边结构维护顶点、边、半边、面及其连接关系。半边结构的优点是能高效查询局部邻接关系，例如顶点一环邻居、边两侧面片、面片边界半边等，这正是 QEM 在每次边塌缩后更新局部候选代价所需要的操作。

核心实现位于 `include/qem/` 和 `src/`：`Math.cpp` 负责 quadric 和最优位置求解，`Simplifier.cpp` 负责 QEM 初始化、候选堆、边塌缩、边界保护和翻面检测，`main.cpp` 提供命令行入口。本实现默认启用两类保护机制：**Boundary Preservation** 对开边界附近增加约束，避免边界轮廓被过度收缩；**Flip Detection** 在塌缩前检查局部相邻三角形法向，拒绝可能导致法向翻转的候选操作。

本项目实现的是基于边的 QEM 收缩，即论文中有效顶点对阈值 $t = 0$ 的情况；未实现任意非相邻顶点对的 pair contraction。因此它覆盖了 QEM 的核心误差度和边塌缩流程，但不是论文中最完整的所有扩展版本。

3. 实验设置

实验使用 7 个模型：Armadillo、bunny、cow、gargoyle、kitten、lucy 和 Teapot。每个模型分别简化到原始顶点数的 50%、20% 和 10%。对比方法为本项目实现的 QEM 与 QSlim2.0；误差评估使用 Metro 工具，记录双向采样误差中的最大误差（Hausdorff）、平均误差和 RMS 误差。各模型输入规模如下：

模型	顶点数	面数	边界边	特征说明
Armadillo	30,002	59,998	0	中等规模闭合模型
bunny	7,203	14,402	0	常用测试模型，形状平滑
cow	3,195	5,804	584	存在明显开边界
gargoyle	111,137	222,270	0	最大模型，局部细节多
kitten	1,370	2,740	0	小规模闭合模型
lucy	11,829	23,654	0	输入含四边形，读入后被三角化
Teapot	22,162	44,340	0	非均匀采样，并含退化面

评价指标包括 Hausdorff、Mean 和 RMS。Hausdorff 反映最坏局部误差，对轮廓破损、小孔、尖刺等局部问题敏感；Mean 反映平均表面距离；RMS 反映整体误差能量。由于不同模型尺度差异较大，报告中还使用误差比值 $\text{error(QEM)}/\text{error(QSlim)}$ 和几何平均进行汇总，避免某个尺度特别大的模型支配平均结果。

4. 实验结果与分析

4.1 总体量化结果

21 组主实验的整体统计如下：

指标	QEM 胜场	QEM/QSlim 几何平均	单组改进中位数
相对 Hausdorff	15 / 21	0.935x	17.4%
双向平均 Mean	4 / 21	1.000x	-8.1%
双向平均 RMS	5 / 21	0.981x	-5.7%

结果表明，本实现最明显的优势体现在 Hausdorff 指标上：21 组实验中有 15 组优于 QSlim，说明它更常能压低最坏局部误差。但 Mean 和 RMS 胜场分别只有 4 组和 5 组，因此不能认为本实现全面优于 QSlim。

按简化比例统计如下：

保留顶点比例	Hausdorff 胜场	H 几何平均比	RMS 胜场	RMS 几何平均比
50%	5/7	0.961x	3/7	0.884x
20%	5/7	0.921x	2/7	0.994x
10%	5/7	0.922x	0/7	1.074x

在三个简化比例下，本实现的 Hausdorff 胜场都为 5/7，说明最大误差控制优势比较稳定。但 10% 简化时 RMS 胜场为 0/7，说明激进压缩下局部峰值误差和整体平均偏差存在权衡。

图 1 以 bunny 为例展示不同简化比例下的视觉效果。随着保留顶点比例从 50% 降到 10%，三角形密度明显下降，整体轮廓仍可辨认，但局部细节逐渐被平滑化。

			
原始模型	QEM 50%	QEM 20%	QEM 10%

4.2 按模型分析

按模型聚合后的结果如下：

模型	H 胜场	H 几何平均比	RMS 胜场	RMS 几何平均比
Armadillo	3/3	0.809x	0/3	1.063x
bunny	3/3	0.612x	1/3	0.990x
cow	2/3	0.716x	1/3	1.042x
gargoyle	1/3	0.883x	0/3	1.088x
kitten	3/3	0.738x	0/3	1.093x
lucy	3/3	0.674x	1/3	0.833x
Teapot	0/3	4.001x	2/3	0.804x

bunny、kitten、lucy 在 Hausdorff 指标上三档均由本实现获胜，说明这些模型上的局部最大误差控制较好。Teapot 是最明显的反例：三档 Hausdorff 均由 QSlim 获胜，例如 50% 时本实现相对 Hausdorff 为 0.218%，QSlim 为 0.027%。后续权重策略消融显示，本实现与 QSlim uniform weighting 结果几乎一致，而 QSlim area weighting 显著降低 Teapot 上的 Hausdorff 误差，因此 Teapot 的差异主要来自误差权重策略。图 2 给出 Teapot 的可视化对比。

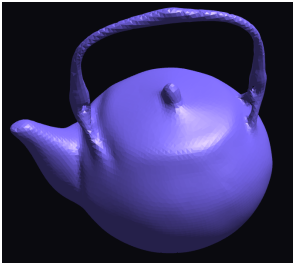
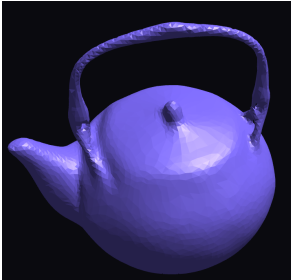
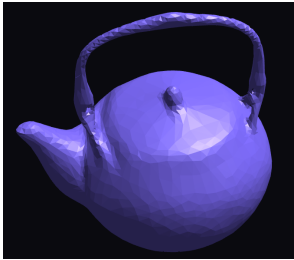
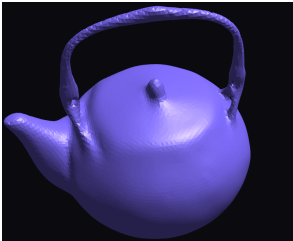
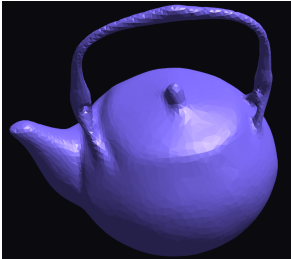
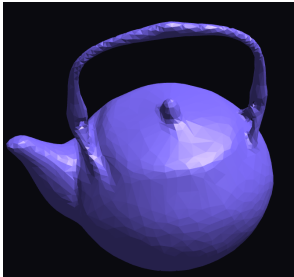
	50%	20%	10%
本实现 QEM			
QSlim2.0			

图 2 表明，当输入网格采样不均匀时，等权 quadric 容易让小三角形密集区域获得过高权重；面积加权能更接近按真实表面积分配误差预算。

4.3 Hausdorff 与 RMS 的差异

实验中共有 14/21 组出现 Hausdorff 和 RMS 给出不同优胜者的情况。例如 Armadillo 三档均是本实现 Hausdorff 更低但 RMS 更高。Hausdorff 对单个局部最坏区域敏感，适合发现轮廓破损、尖刺、小孔等局部问题；RMS 更关注整体误差能量。因此，本项目的实验结果更准确地体现为：本实现更常降低最坏局部误差，而不是在所有指标上整体优于 QSlim。

4.4 Boundary Preservation 消融

Boundary Preservation 的作用是保护开边界。开边界指网格中只被一个三角形使用的边，例如洞口或扫描残缺区域的轮廓边。普通 QEM 只累加相邻三角形的支撑平面，对开边界缺失一侧没有约束，因此边界附近的边可能因代价较低而被过度塌缩，造成开口收缩、轮廓变形或边界顶点向内部漂移。

在 7 个模型中，cow 是唯一有明显开边界的模型，原始模型包含 584 条边界边。cow 10% 消融结果如下：

配置	顶点数	面数	边界边	相对 Hausdorff	Forward RMS	Backward RMS	危险塌缩
默认： 边界保护 + 翻面检测	320	390	248	2.823%	1.108	1.127	0
关闭边界保护	320	494	144	3.819%	1.199	0.423	0
关闭翻面检测	320	389	249	2.823%	1.132	1.120	50
两者都关闭	320	497	141	3.825%	1.200	0.411	32

Boundary ON: H=2.823%, 390 faces

Boundary OFF: H=3.819%, 494 faces

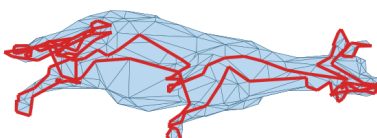
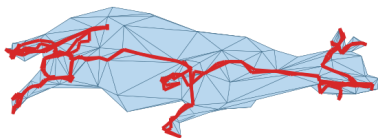


图 3 cow 边界保护消融，红线为最终开边界

图 3 中红线表示简化结果中的最终开边界，即只属于一个三角形的边。关闭边界保护后，cow 10% 的相对 Hausdorff 从 2.823% 上升到 3.819%，最坏误差增加约 35.3%；边界边数量从 248 降到 144，说明边界被更强烈地合并和收缩。表中最终面数不同是由实验目标和边塌缩类型共同决定的：本实验固定目标顶点数 320，而内部边塌缩通常删除两个三角形，边界边塌缩通常只删除一个三角形。关闭边界约束后，边界/内部塌缩分布改变，所以相同顶点数可对应不同面数。该消融结论限于开边界模型；7 个测试模型中只有 cow 有明显开边界，因此闭合模型上的 QEM 优势不能归因于 Boundary Preservation。

4.5 Flip Detection 消融

Flip Detection 用于检测边塌缩是否会导致局部三角形法向翻转。QEM 只最小化点到平面的代数距离，并不包含“新三角形必须保持原朝向”的硬约束，因此低代价候选仍可能造成翻面、退化、穿插或异常光照。本项目在候选边塌缩前计算新旧法向点积；若新三角形退化，或点积不大于 $1e-6$ ，则拒绝该候选。OpenMesh 的 `is_collapse_ok()` 主要检查拓扑合法性，不能替代几何翻面检查。

消融结果如下：

模型/配置	顶点数	面数	被拒绝候选位置	相对 Hausdorff	unsafe collapse
bunny 10% 默认	720	1436	46,152	0.383%	0
bunny 10% 关闭翻面检测	720	1436	0	0.422%	39
kitten 10% 默认	137	274	7,663	1.775%	0
kitten 10% 关闭翻面检测	137	274	0	1.644%	13
cow 10% 默认	320	390	20,480	2.823%	0
cow 10% 关闭翻面检测	320	389	0	2.823%	50

Flip ON: $H=0.383\%$, rejected trials=46,152

Flip OFF: $H=0.422\%$, unsafe collapses=39

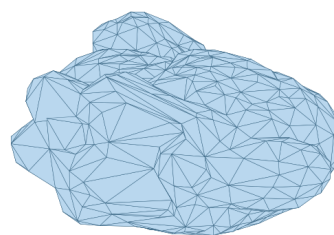
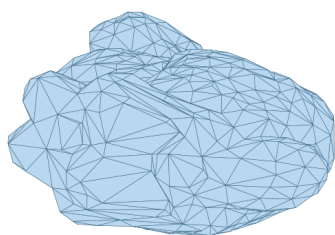


图 4 bunny 翻面检测消融

Flip ON: $H=1.775\%$, rejected trials=7,663

Flip OFF: $H=1.644\%$, unsafe collapses=13

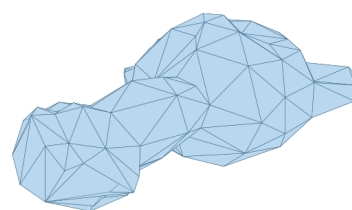
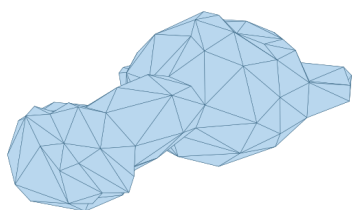


图 5 kitten 翻面检测消融

关闭翻面检测后，bunny、kitten、cow 分别出现 39、13、50 次 unsafe collapse。bunny 的相对 Hausdorff 从 0.383% 上升到 0.422%，说明翻面检测同时改善了局部几何合法性和最大误差；kitten 的 Hausdorff 虽从 1.775% 降到 1.644%，但 unsafe collapse 增加到 13，且小角三角形比例上升。该结果说明 Flip Detection 是几何合法性约束，不是单纯的 Metro 误差优化项；距离指标不能替代翻面和退化检查。

4.6 消融实验小结

两类保护机制针对的问题不同。Boundary Preservation 主要保护开边界轮廓，Flip Detection 主要保证局部三角形朝向和非退化性。二者都属于 QEM 基础误差度量之外的几何/拓扑约束：QEM 估计候选塌

缩位置的误差，保护机制限制不可接受的塌缩操作。

5. 运行性能分析

50% 简化时的运行时间如下：

模型	原始顶点数	QEM 时间	QSlim 时间	QEM/QSlim
Armadillo	30,002	14.036 s	5.523 s	2.54x
bunny	7,203	1.120 s	1.357 s	0.83x
cow	3,195	0.342 s	0.545 s	0.63x
gargoyle	111,137	177.498 s	18.439 s	9.63x
kitten	1,370	0.167 s	0.276 s	0.61x
lucy	11,829	2.449 s	2.208 s	1.11x
Teapot	22,162	7.777 s	4.149 s	1.87x

小模型上本实现速度接近甚至快于 QSlim，例如 cow 和 kitten；但在 gargoyle 上明显慢于 QSlim。理论 QEM 主流程可描述为优先队列上的 $O(n \log n)$ ，但本项目实际实现还受到 lazy heap 过期候选、OpenMesh 合法性检查、翻面检测和计数刷新的影响，因此大模型性能仍有优化空间。

6. 总结

本项目完成了基于 OpenMesh 半边结构的 QEM 三角网格简化程序，支持 OBJ 输入输出、按比例或目标顶点数简化、批量处理 7 个测试模型，并实现了边界保护和翻面检测。实验结果表明，本实现相对 QSlim2.0 在 Hausdorff 指标上 15/21 组获胜，更常能降低局部最大误差；但 Mean 和 RMS 并没有全面优于 QSlim，因此不能简单认为本实现整体更优。Teapot 反例说明误差权重策略会显著影响结果，QSlim 的 area weighting 在非均匀采样模型上具有明显优势。Boundary Preservation 消融证明边界保护能降低 cow 这类开边界模型的最坏误差；Flip Detection 消融说明翻面检测主要是网格合法性约束，而不是单纯优化 Metro 距离指标。

当前工作的不足包括：只实现了边收缩版本，未实现任意非相邻顶点对的 pair contraction；没有加入面积加权 quadric；对非流形输入和退化三角形的处理仍较保守；大模型性能还有优化空间。后续可进一步加入面积加权、属性保持、视觉感知误差度量和更高效的局部更新策略。